

[21-BS 532-7A]

AT THE END OF FIFTH SEMESTER (CBCS PATTERN)

MATHEMATICS – V – 7A – MATHEMATICAL SPECIAL FUNCTIONS

(COMMON FOR B.A., B.Sc)

UG PROGRAM (4 YEARS HONORS)

(w.e.f. Admitted Batch 2020–2021)

Time: 3 Hours

Max. Marks: 75

SECTION A — (5 × 5 = 25 marks)

Answer any FIVE questions.

1. Prove that $\beta(m, n) = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1} \theta \cos^{2n-1} \theta d\theta$.

$\beta(m, n) = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1} \theta \cos^{2n-1} \theta d\theta$ అని నిరూపించండి.

2. Show that $x=0$ is an ordinary point of $(x^2-1)y'' + xy' + y=0$ but $x=1$ is a regular singular point.

$(x^2-1)y'' + xy' + y=0$ నకు $x=0$ సాధారణ బిందువు అని $x=1$ సాధారణ ఏక బిందువు అని చూపండి.

3. Prove that $H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x)$ for $n \geq 1$.

$H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x)$ for $n \geq 1$ అని నిరూపించండి.

4. Prove that $(2n+1)xP_n = (n+1)P_{n+1} + nP_{n-1}$.

$(2n+1)xP_n = (n+1)P_{n+1} + nP_{n-1}$ అని నిరూపించండి.

5. Prove that $\frac{d}{dx}[x^{-n}J_n(x)] = x^{-n}J_{n+1}(x)$.

$\frac{d}{dx}[x^{-n}J_n(x)] = x^{-n}J_{n+1}(x)$ అని నిరూపించండి.

6. Show that $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ అని చూపండి.

2024

7. Find the radius of convergence of the series $x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{2!}{3^3}x^3 + \frac{3!}{4^4}x^4 + \dots + \dots$

$$x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{2!}{3^3}x^3 + \frac{3!}{4^4}x^4 + \dots + \dots \text{ అభిసరణీయత యొక్క వ్యాసార్థము కనుగొనుము.}$$

8. Prove that $x^5 = \frac{1}{32}H_5(x) + \frac{5}{8}H_3(x) + \frac{15}{8}H_1(x)$.

$$x^5 = \frac{1}{32}H_5(x) + \frac{5}{8}H_3(x) + \frac{15}{8}H_1(x) \text{ అని నిరూపించండి.}$$

SECTION B — (5 × 10 = 50 marks)

Answer ALL the questions.

9. (a) Show that $\beta(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$.

$$\beta(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \text{ అని చూపండి.}$$

Or

- (b) Prove that $\Gamma(m)\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2m-1}}(2m)$ where $m \in \mathbb{Z}$ is an integer.

$$\Gamma(m)\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2m-1}}(2m); m \in \mathbb{Z} \text{ అని నిరూపించండి.}$$

10. (a) Solve by power series method $y' - y = 0$.

$$y' - y = 0 \text{ సమీకరణమును శక్తి ప్రమేయము పద్ధతిలో సాధించండి.}$$

Or

- (b) Solve by the power series method $y'' - xy' = e^{-x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -3$.

$$y'' - xy' = e^{-x}, y(0) = 2, y'(0) = -3 \text{ సమీకరణమును శక్తి ప్రమేయము పద్ధతిలో సాధించండి.}$$

11. (a) Prove that $2xH_n(x) = 2nH_{n-1}(x) + H_{n+1}(x)$.

$$2xH_n(x) = 2nH_{n-1}(x) + H_{n+1}(x) \text{ అని నిరూపించండి.}$$

Or

- (b) State and prove Rodrigue's formula for Hermite polynomials.

$$\text{హెర్మిట్ ప్రమేయము యొక్క రొడ్రిగ్ సూత్రమును రాసి నిరూపించండి.}$$

12. (a) State and prove Orthogonal properties of $P_n(x)$.

$P_n(x)$ యొక్క లంబ ధర్మమును వ్రాసి నిరూపించండి.

Or

(b) (i) Prove that $(1-x^2)P'_n = n(P_{n-1} - xP_n)$

$(1-x^2)P'_n = n(P_{n-1} - xP_n)$ అని నిరూపించండి.

(ii) Show that $P_n(1)=1, P_n(-x)=(-1)^n P_n(x)$.

$P_n(1)=1, P_n(-x)=(-1)^n P_n(x)$ అని చూపండి.

13. (a) (i) Prove that $2J_n'(x) = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)$.

$2J_n'(x) = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)$ అని నిరూపించండి.

(ii) Prove that $J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$

$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$ అని నిరూపించండి.

Or

(b) (i) Prove that $J_n'(x) = \frac{2}{x} \left[\frac{n}{2} J_n - (n+2) J_{n+2} + (n+4) J_{n+4} - \dots \right]$

$J_n'(x) = \frac{2}{x} \left[\frac{n}{2} J_n - (n+2) J_{n+2} + (n+4) J_{n+4} - \dots \right]$ అని నిరూపించండి.

(ii) Prove that $\frac{d}{dx} [x J_n J_{n+1}] = x [J_n^2 + J_{n+1}^2]$

$\frac{d}{dx} [x J_n J_{n+1}] = x [J_n^2 + J_{n+1}^2]$ అని నిరూపించండి.